ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1985

***

MATHEMATIQUES I **P'**

On rappelle qu'étant donné un corps commutatif K, une K-algèbre commutative A est un K-espace vectoriel muni d'une multiplication interne associant à tout couple (x,y) d'éléments de A un élément noté xy de A, cette multiplication étant associative, commutative, distributive par rapport à l'addition et possédant, par rapport à la multiplication par un scalaire, la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in K, \forall x \in A, \forall y \in A, \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

Dans ce problème, le corps K étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit K^n, où $n \geqslant 2$, des lois de composition suivantes :

addition : $(x_1, x_2, .. x_n) + (y_1, y_2, ... y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, ... x_n+y_n)$
multiplication par un scalaire : $\lambda(x_1, x_2, ... x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ... \lambda x_n)$
multiplication interne : $(x_1, x_2, ...x_n)(y_1, y_2, ...y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, ...x_ny_n)$

On admettra, ce qui est d'ailleurs immédiat, que ces trois lois confèrent à K^n une structure de K-algèbre commutative. On notera $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ...e_n)$ la base naturelle de K^n, c'est-à-dire la base de K^n formée des éléments :

$e_1 = (1, 0, ... 0)$
.....
$e_i = (0,0, ...1, ... 0)$
.....
$e_n = (0,0, ... 0,1)$

le seul coefficient non nul de e_i étant un "1" situé à la $i^{ème}$ place. L'élément

$$\varepsilon = e_1 + e_2 + ... + e_n = (1,1, ... 1)$$

est manifestement élément unité pour la multiplication interne de K^n (et on admettra ce résultat).

PREMIERE PARTIE

I-1. Une forme linéaire φ sur K^n sera dite multiplicative si :

$$\forall x \in K^n, \forall y \in K^n, \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\ \varphi(y)$$

Etablir que les seules formes linéaires multiplicatives de K^n sont la forme nulle et les formes $c_1, c_2, ... c_n$, où c_i désigne la $i^{ème}$ forme coordonnée dans la base $\mathcal{E}$, c'est-à-dire l'application qui à tout $x=(x_1,x_2,..x_n)$ associe x_i ; on pourra utiliser les images par φ des vecteurs de $\mathcal{E}$.

I-2. a) Soit f un automorphisme d'algèbre de K^n : f est une bijection de K^n vers K^n compatible avec les trois lois, c'est-à-dire que f est linéaire et que, de plus

$$\forall x \in K^n, \forall y \in K^n, \quad f(xy) = f(x)\ f(y)$$

Si φ est une forme linéaire multiplicative de K^n autre que la forme nulle, que dire de $\varphi \circ f$?

b) En déduire tous les automorphismes d'algèbre de K^n. Quel est leur nombre ?

Dans ce problème, on appellera sous - algèbre de K^n tout sous-espace vectoriel A de K^n contenant l'élément unité ε et stable par la multiplication interne c'est-à-dire que pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$, xy appartient à A. La sous-algèbre engendrée par une partie P de K^n est l'intersection des sous - algèbres la contenant ; on admettra que c'est encore une sous - algèbre.

I.3. Etant donné un élément a de K^n, démontrer que la sous - algèbre engendrée par a est K^n si et seulement si les coordonnées de a (dans la base $\mathcal{E}$) sont toutes distinctes.

I-4. Soit A une sous - algèbre de K^n ; on note $\bar{c}_1, \bar{c}_2, ... \bar{c}_n$ les restrictions de $c_1, c_2, ... c_n$ à A (voir définition des c_i en I-1.).

On suppose ici qu'il existe k tel que $\bar{c}_1, \bar{c}_2, ... \bar{c}_k$ soient distinctes, et que, pour tout $i > k$, il existe $j \leqslant k$ vérifiant $\bar{c}_i = \bar{c}_j$.

a) Etablir que $\bar{c}_1, \bar{c}_2, ... \bar{c}_n$ sont toutes non nulles.

b) Montrer que, pour tout couple i, j d'entiers tels que

$$i \neq j \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant k \ , \quad 1 \leqslant j \leqslant k \ ,$$

il existe $u_{ij} \in A$ tel que $c_i(u_{ij}) = 1, \ c_j(u_{ij}) = 0$

c) En déduire l'existence, pour tout entier i allant de 1 à k, d'un $w_i \in A$ tel que :

$$c_i(w_i) = 1$$

$$c_j(w_i) = 0 \text{ pour tout } j \text{ vérifiant } j \neq i \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant k$$

d) $w_1, w_2, \ldots, w_k$ sont-ils liés ? Quelle est leur somme ?

Quel est le sous-espace vectoriel de K^n qu'ils engendrent ?

I-5. Déduire de la question précédente une méthode de construction de toutes les sous - algèbres de dimension k de K^n $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$.

I-6. a) Donner la liste des sous - algèbres (autres que K^n elle-même) de K^n dans les cas n=2, n=3, n=4. Il est signalé que, par exemple, l'ensemble des (α, α, β) où (α, β) décrit K^2 est une sous - algèbre de dimension 2 de K^3. On demande, pour chacune des sous - algèbres de K^n (n=2, n=3, n=4), de donner un mode de génération analogue à celui-là.

b) Combien K^n a-t-elle de sous - algèbres de dimension 2, de dimension n-1 ?

DEUXIEME PARTIE

II-1. Question préliminaire

On appelle trace d'une matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la somme $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ des coefficients de sa diagonale, notée tr(M).

a) Etablir que, si M et N sont deux matrices carrées d'ordre n sur K, tr(MN) = tr(NM)

b) En déduire que deux matrices semblables ont même trace. Il en résulte que la trace de la matrice d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel dans une base est indépendante de la base en question ; on la dit "trace de f", notée tr(f).

c) On désigne ici par a un élément donné de K^n.

Etablir que l'application μ_a de l'algèbre K^n dans elle-même qui à tout x associe ax est un endomorphisme d'espace vectoriel de K^n, dont la trace est $\sum_{i=1}^{n} c_i(a)$, où $c_i(a)$ désigne ici encore la i-ième coordonnée de a dans la base $\mathcal{E}$; ce nombre sera dit trace de a et noté tr(a).

On étudie dans toute la suite du problème les bases $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ de K^n ayant la propriété suivante : pour tout i et tout j allant de 1 à n, distincts ou non, il existe k entier compris au sens large entre 1 et n tel que

$$v_i v_j = v_k \quad .$$

Une telle base sera dite une base stable de K^n.

II-2. a) Etablir que si n vecteurs forment une base stable de K^n, leurs images par tout automorphisme d'algèbre de K^n forment une base stable.

b) Montrer que, si une matrice M carrée d'ordre n sur K est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à une base stable, il en est de même de toute matrice déduite de M par permutation des lignes ou par permutation des colonnes.

II-3. a) Soit $\mathcal{B}$ une base stable de K^n. Etablir que la forme linéaire qui prend la valeur 1 pour chacun des vecteurs de $\mathcal{B}$ est multiplicative (cf I-1.)

b) Etant donné une base $\mathcal{B}$ de K^n, on appellera matrice de $\mathcal{B}$ et on notera $M_{\mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice dont le terme situé dans la ligne i et la colonne j est la $i^{ème}$ coordonnée dans $\mathcal{E}$ du $j^{ème}$ vecteur de $\mathcal{B}$. Montrer que, si $\mathcal{B}$ est stable, $M_{\mathcal{B}}$ comporte une ligne et une seule dont tous les termes sont égaux à 1.

II-4. Donner les matrices de toutes les bases stables de K^2.

II-5. Soit $\mathcal{B}$ une base stable, a un élément de $\mathcal{B}$.

a) Etablir l'existence d'un entier $p > 0$ tel que $a^{p+1} = a$. On aura intérêt à se servir de la suite $a, a^2, a^3, \ldots$

b) Dans le cas de l'algèbre $\mathbb{R}^n$, trouver une valeur p indépendante de $\mathcal{B}$ et de a.

II-6. Montrer que le nombre de bases stables de K^n est fini.

II-7. Soit $\mathcal{B}$ une base stable de K^n, a un élément de $\mathcal{B}$. En utilisant l'application μ_a définie au (II-1c) et sa matrice dans une base convenable, établir que la trace de a est un entier compris au sens large entre o et n,

A quelle condition a-t-on tr(a)=n ?

II-8. a) Soit $\mathcal{B}$ une base stable de K^n ; établir que $M_{\mathcal{B}}$ comporte au moins 2n-1 coefficients non nuls.

b) On suppose que $M_{\mathcal{B}}$ comporte exactement 2n-1 coefficient non nuls. Etablir que $M_{\mathcal{B}}$ se déduit par permutation de lignes et de colonnes de la matrice N dont tous les termes sont nuls sauf ceux de la première ligne et de la diagonale qui, eux, sont tous égaux à 1.

c) Montrer que N est bien la matrice d'une base stable.

TROISIEME PARTIE

On étudie désormais les bases stables de K^n dont tout élément a est inversible (c'est-à-dire qu'il existe $b \in K^n$ tel que $ab = \varepsilon$). Ces bases seront dites bases stables inversibles.

III-1. a) Montrer que, si $\mathcal{B}$ est une base stable inversible, alors l'un des vecteurs de $\mathcal{B}$ est ε.

b) Montrer que les coefficients de la matrice $M_{\mathcal{B}}$ d'une base stable inversible sont tous de module 1.

III-2. En raisonnant comme en II-7, établir que pour tout élément a d'une base stable inversible tel que $a \neq \varepsilon$, on a

$$tr(a)=0$$

III-3. Soit $\mathcal{B}$ une base stable inversible, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$, et s la somme de ses vecteurs. Calculer tr(s) ; calculer sv_i pour i allant de 1 à n, puis s^2. En déduire que s est le produit par n d'un vecteur de $\mathcal{E}$.

III-4. Montrer que la matrice $M_{\mathcal{B}}$ de toute base stable inversible $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$ se déduit par permutations de lignes et de colonnes d'une matrice que l'on donnera.

III-5. a) Montrer que l'ensemble des vecteurs d'une base stable inversible de K^n est un groupe multiplicatif.

b) Montrer que, si $\mathcal{B}$ est une telle base, $\frac{1}{\sqrt{n}} M_{\mathcal{B}}$ est

orthogonale si $K = \mathbb{R}$,

unitaire si $K = \mathbb{C}$.

c) En déduire le module du déterminant de $M_{\mathcal{B}}$.

III-6. On prend ici $K = \mathbb{C}$; on appelle P_z la matrice carrée d'ordre n dont le terme général (ligne j, colonne k) est $z^{(j-1)(k-1)}$. Etablir que P_z est la matrice d'une base stable inversible de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si

$$z^n = 1$$

$z, z^2, \ldots z^{n-1}$ sont tous différents de 1 ;

Donner une valeur de z possédant ces propriétés.

III-7. On suppose ici que $\mathbb{R}^n$ a au moins une base stable inversible $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$. Une partie $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_p})$ sera dite partie génératrice de $\mathcal{B}$ si tout élément de $\mathcal{B}$ peut s'écrire sous la forme d'un produit

$$v_{i_1}^{m_1} v_{i_2}^{m_2} \ldots v_{i_p}^{m_p}$$

où $m_1, m_2, \ldots m_p$ sont des entiers relatifs (on pose, pour tout élément a non nul de $\mathbb{R}^n$, $a^0 = \varepsilon$).

a) Montrer que $\mathcal{B}$ possède des parties génératrices et que tout élément de $\mathcal{B}$ a pour carré ε.

b) Soit $\mathcal{G} = (v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots v_{j_k})$ une partie génératrice de $\mathcal{B}$ dont le nombre d'éléments, k, est le plus petit possible.

Etablir que tout élément de $\mathcal{B}$ peut s'écrire, et de façon unique, sous la forme

$$v_{j_1}^{r_1} v_{j_2}^{r_2} \ldots v_{j_k}^{r_k}$$

où chacun des exposants $r_1, r_2, \ldots r_k$ vaut 0 ou 1.

c) Quelle relation existe-t-il entre n et k ?

II-8. a) On recherche les bases stables inversibles de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il y en a une et une seule, $\mathcal{B}_0$, dont la matrice M_0 ait sa première ligne formée de quatre "1", ait pour trace 4 et soit symétrique.

b) Les matrices des autres bases stables inversibles de $\mathbb{R}^4$ se déduisent-elles de M_0 par permutations des lignes et des colonnes ?

III-9. a) Soit A la matrice d'une base stable inversible de $\mathbb{R}^n$. Que dire de la matrice carrée réelle d'ordre 2n définie par

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & -A \end{array}\right) \quad ?$$

b) Pour quels n l'algèbre $\mathbb{R}^n$ a-t-elle au moins une base stable inversible ?